УДК 614.841.34

Олег Пазен, *д-р фіз.-мат. наук, проф,,*
ORCID iD 0000-0003-1655-3825
Роман Тацій, *канд.. техн. наук*,
ORCID iD 0000-0001-7764-2528
Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, м. Львів, Україна, E-mail: opazen@gmail.com

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ТЕПЛООБМІНУ В БАГАТОШАРОВОМУ СУЦІЛЬНОМУ ЦИЛІНДРІ З УРАХУВАННЯМ ВНУТРІШНІХ ДЖЕРЕЛ ТЕПЛА

https//doi.org/10.33269/nvcz.2020.1.66-75

ІНФОРМАЦІЯ ПРО СТАТТЮ

*Надійшла до редакції:*12.09.2020
Пройшла рецензування: 24.09.2020

КЛЮЧОВІ СЛОВА:

суцільний циліндр, квазіпохідна, прямий метод, граничний перехід.

АНОТАЦІЯ

Стаття присвячена застосуванню прямого методу до дослідження процесів теплообміну в системі «суцільний циліндр всередині багатошарової циліндричної оболонки». Для розв'язування вихідної задачі ставиться допоміжна задача з «вилученим» циліндром достатньо малого радіуса. Розв'язок побудований на основі методу редукції, концепції квазіпохідних, схеми Фур'є із застосуванням модифікованого методу власних функцій. Розв'язок вихідної задачі отримано шляхом прямування радіуса вилученого циліндра до нуля.

Усередині тіл можуть відбуватись різноманітні процеси, що супроводжуються виділенням або поглинанням тепла. Такі явища відбуваються при проходженні електричного струму через електронні елементи або провідники, у тепловиділяючих елементах ядерних реакторів, протіканні хімічних реакцій, випаровуванні вологи при нагріванні бетонних або залізобетонних конструкції, тощо. Таке виділення або поглинання тепла у тілі може суттєво впливати на процес теплопровідності в ньому.

З точки зору пожежної безпеки задачі про дослідження теплообміну в багатошарових суцільних циліндричних конструкціях є невід'ємною складовою під час визначення межі вогнестійкості конструкцій. До них відносяться колони круглого поперечного перерізу, трубобетонні колони та конструкції, які мають круглий суцільний переріз. Тому дослідження процесів теплообміну в багатошарових суцільних циліндричних конструкціях з урахуванням внутрішніх джерел тепла є актуальною науково-технічною задачею.

Аналіз літературних джерел. Ймовірно, що перша і найпростіша постановка задачі на охолодження системи вкладених тіл «циліндр всередині циліндричної оболонки» (без урахування внутрішнього джерела тепла) була поставлена і розв'язана операційним методом в монографії [0]. На жаль, алгоритмів розв'язування цієї задачі, в цитованій монографії, не наведено. Крім того, в задачі про охолодження системи «суцільний циліндр всередині циліндричної оболонки» припускається, що оболонка є настільки тонкою, що її в першому наближені можна вважати плоскою. Це припущення суттєво спрощує розв'язок, але питання про величину отриманої при цьому похибки до цього часу залишається відкритим.

Загалом, методам дослідження задач теорії теплопровідності присвячені численні публікації. Ці методи умовно можна поділити на три види: а) прямі або класичні [0], [0], що базуються на методі відокремлення змінних; б) операційні [0], [0-0], що використовують різного роду інтегральні перетворення; в) наближені аналітичні та числові методи [0], [0]. Так,

у роботі [0] запропоновано метод розв'язування задачі теплопровідності для багатошарового порожнистого циліндра, проте без урахування внутрішніх джерел тепла. У [0] досліджується розподіл температурного поля в багатошаровій порожнистій циліндричній конструкції з включенням внутрішнього джерела тепла, методом інтегрального перетворення Лапласа. У публікаціях [0], [0] застосовується прямий метод до знаходження температурних полів у багатошарових порожнистих циліндричних та сферичних конструкціях.

Проблеми, які залишаються невирішеними. Теоретично, аналітичні методи повинні застосовуватися до багатошарових конструкцій. Однак на практиці кількість шарів, як правило, обмежується двома або трьома [0]. Це зумовлено тим, що при збільшенні кількості шарів значно зростають обчислень. Крім цього, у задачах «циліндр всередині багатошарової оболонки», існує проблема обмеження розв'язку в точці $r = 0$.

Мета і завдання дослідження. З огляду на проведений аналіз, метою даної роботи є застосування прямого методу до знаходження ефективного аналітичного розв'язку задачі теплопровідності у суцільних багатошарових циліндричних конструкціях з урахуванням внутрішніх джерел тепла.

Вихідна задача. Розглянемо суцільний необмежений циліндр радіусом $r = r_1$, який в подальшому називатимемо ядром, всередині багатошарової циліндричної оболонки радіусами $r_1 < r_2 < ... < r_{n-1} < r_n$. Між шарами існує ідеальний тепловий контакт, а у початковий момент часу $\tau = 0$, така циліндрична конструкція має однакову початкову температуру $T = T_0$, яка співпадає з температурою навколишнього середовища. На зовнішній поверхні конструкції відбувається конвективний теплообмін з навколишнім середовищем, температура якого змінюється за деяким законом $\psi(\tau)$, тобто виконується крайова умова третього роду. Крім цього, у ядрі та шарах конструкції передбачено наявність внутрішніх (розподілених) джерела тепла q_v. Вважатимемо, що температура середовища $\psi(\tau)$ рівномірно розподілена по поверхні циліндричної оболонки так, що ізотерми всередині цієї конструкції являють собою коаксіальні поверхні, а це значить, що температура $T(r,\tau)$ залежить лише від радіуса r та часу τ і задача є симетричною. Необхідно знайти розподіл нестаціонарного температурного поля $T(r,\tau)$ такої конструкції у будь-який момент часу τ.

Така постановка задачі зводиться до розв'язування диференціального рівняння теплопровідності з крайовою умовою третього роду, умовою симетрії та початковою умовою відповідно [0]

$$c\rho\frac{\partial T(r,\tau)}{\partial\tau} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda\frac{\partial T(r,\tau)}{\partial r}\right) + q_v, \quad r \in (0, r_n), \quad \tau > 0, \tag{1}$$

$$-\lambda\frac{\partial T}{\partial r}(r_n,\tau) = \alpha\left(T(r_n,\tau) - \psi(\tau)\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r}(0,\tau) = 0, \tag{3}$$

$$T(r,0) = T_0. \tag{4}$$

де, c – питома масова теплоємність, Дж/(кг·°С); r – координата, м; T – температура, °С; α – коефіцієнт теплообміну, Вт/(м^2·°С); λ – коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м·°С); ρ – густина, кг/м^3; q_v – інтенсивність внутрішнього джерела тепла, Вт/м^3; τ – час, с; $\psi(\tau)$ – закон зміни температури навколишнього середовища, °С.

Допоміжна задача. Для того, щоб розв'язати поставлену задачу (1)-(4) вилучимо з середини ядра циліндр радіусом $r = r_0$, причому $0 < r_0 < r_1$. Розглянемо тепер мішану задачу теплопровідності для багатошарової порожнистої циліндричної конструкції. Для того, щоб розрізнити функцію розподілу температурного поля $T(r,\tau)$ вихідної задачі від функції розподілу допоміжної задачі, позначатимемо останню через $t(r,\tau)$.

Для знаходження розподілу нестаціонарного температурного поля у багатошаровій порожнистій циліндричній конструкції необхідно знайти розв'язок диференціального рівняння теплопровідності [0]

$$c\rho\frac{\partial t(r,\tau)}{\partial\tau} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda\frac{\partial t(r,\tau)}{\partial r}\right) + q_v,\ r\in(r_0,r_n),\quad \tau>0. \tag{5}$$

Умову симетрії (3) змінимо на нульову крайову умову другого роду, тоді одержимо крайові умови для рівняння (5) разом з початковою умовою

$$\begin{cases} \dfrac{\partial t}{\partial r}(r_0,\tau) = 0, \\ -\lambda\dfrac{\partial t}{\partial r}(r_n,\tau) = \alpha\left(t(r_n,\tau) - \psi(\tau)\right), \end{cases} \tag{6}$$

$$t(r,0) = T_0. \tag{7}$$

Зауважимо, що розв'язок вихідної задачі (1)-(4) буде отримано з розв'язку задачі (5)-(7) шляхом граничного переходу при $r_0 \to 0$.

Схема розв'язання допоміжної задачі. Позначимо, $t^{[1]} \overset{df}{=} r\lambda t'_r$ – квазіпохідна, θ_i – характеристична функція [0] напіввідкритого проміжку $[r_i, r_{i+1})$, тобто $\theta_i(r) = \begin{cases} 1, r\in[r_i,r_{i+1}), \\ 0, r\notin[r_i,r_{i+1}), \end{cases}$

$$\lambda(r) = \sum_{i=0}^{n-1}\lambda_i\theta_i, \qquad c(r)\rho(r) = \sum_{i=0}^{n-1}c_i\rho_i\theta_i,$$

$$q_v(r) = \sum_{i=0}^{n-1}q_{vi}\theta_i, \qquad \lambda_i>0, \qquad c_i\rho_i>0,$$

$$\forall i = \overline{0,n-1},\ \lambda_i, c_i, \rho_i, q_{vi}\in R.$$

Ввівши позначення квазіпохідної $t^{[1]} \overset{df}{=} r\lambda t'_r$, та помноживши крайові умови (6) на λr та r відповідно, отримаємо

$$\begin{cases} t^{[1]}(r_0,\tau) = 0, \\ \alpha r_n t(r_n,\tau) + t^{[1]}(r_n,\tau) = \alpha r_n\psi(\tau). \end{cases} \tag{8}$$

Аналогічно, як і в роботах [0, 0], розв'язок задачі (5)-(7) шукатимемо за допомогою методу редукції [0, 0]

$$t(r,\tau) = u(r,\tau) + v(r,\tau), \tag{9}$$

де одна з функцій ($u(r,\tau)$ або $v(r,\tau)$) вибирається спеціальним чином, а інша вже визначається однозначно.

Крайова задача для $u(r,\tau)$ та мішана задача для $v(r,\tau)$.

Як і вище, позначимо квазіпохідні $r\lambda u'_r \overset{df}{=} u^{[1]}$ та $r\lambda v'_r \overset{df}{=} v^{[1]}$. Визначимо функцію $u(r,\tau)$ як розв'язок крайової (квазістаціонарної) задачі з крайовими умовами

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda\frac{\partial u}{\partial r}\right) + q_v = 0, \tag{10}$$

$$\begin{cases} u^{[1]}(r_0)=0, \\ \alpha r_n u(r_n,\tau)+u^{[1]}(r_n,\tau)=\alpha r_n \psi(\tau). \end{cases} \tag{11}$$

Підставляючи (9) у рівняння (5), з урахуванням (10), послідовно отримуємо мішану задачу для визначення функції $v(r,\tau)$

$$c\rho\frac{\partial}{\partial\tau}(u+v)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda\frac{\partial}{\partial r}(u+v)\right)+q_v \Rightarrow c\rho\frac{\partial v}{\partial\tau}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda\frac{\partial v}{\partial r}\right)-c\rho\frac{\partial u}{\partial\tau}. \tag{12}$$

Оскільки крайові умови (11) для функції $u(r,\tau)$ справджують крайові умови (8) для функції $t(r,\tau)$, отримаємо нульові крайові умови для функції $v(r,\tau)$, та початкову умову

$$\begin{cases} v^{[1]}(r_0,\tau)=0, \\ \alpha r_n v(r_n,\tau)+v^{[1]}(r_n,\tau)=0, \end{cases} \tag{13}$$

$$v(r,0)=T_0-u(r,0)\equiv T_0. \tag{14}$$

Схема побудови розв'язку задачі (10) (11) детально вивчено та описано у роботах [0, 0]. Встановлено, що на кожному з проміжків $[r_i,r_{i+1})$ розв'язок задачі (10), (11) зображується як вектор-функція $\mathbf{u}_i(r,\tau)$, де першою координатою є шукана функція $u_i(r,\tau)$, як розв'язок рівняння (10), а другою – її квазіпохідна

$$\mathbf{u}_i(r,\tau)=\mathbf{B}_i(r,r_i)\cdot\mathbf{B}(r_i,r_0)\cdot\mathbf{P}_0+\mathbf{B}_i(r,r_i)\cdot\sum_{k=1}^{i}\mathbf{B}(r_i,r_k)\cdot\mathbf{Z}_k+\int_{r_i}^{r}\mathbf{B}_i(r,s)\cdot\mathbf{q}_i(s)ds,$$

де $\mathbf{P}_0$ – початковий вектор, який обчислюється за формулою

$$\mathbf{P}_0=(\mathbf{P}+\mathbf{QB}(r_n,r_0))^{-1}\cdot(\mathbf{\Gamma}-\mathbf{Q}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{B}(r_n,r_k)\cdot\mathbf{Z}_k),$$

$$P=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad Q=\begin{pmatrix}0&0\\\alpha r_n&1\end{pmatrix},\quad \mathbf{\Gamma}(\tau)=\left(0,\quad \alpha r_n\psi(\tau)\right)^T.\ \mathbf{B}_i(r,\mathrm{s})=\begin{pmatrix}1&K_i(r,s)\\0&1\end{pmatrix},$$

$$K_{1i}(r,s)=\frac{1}{\lambda_i}\ln\frac{r}{s},\ \mathbf{B}(r_i,r_0)=\begin{pmatrix}1&K(r_i,r_0)\\0&1\end{pmatrix},\ K(r_i,r_0)=\sum_{k=0}^{i-1}\frac{1}{\lambda_k}\ln\frac{r_{k+1}}{r_k},$$

$$\mathbf{Z}_k=-\begin{pmatrix}\frac{q_{v,k-1}}{\lambda_{k-1}}\left[\frac{1}{4}\left(r_k^2-r_{k-1}^2\right)-\frac{r_{k-1}^2}{2}\ln\frac{r_k}{r_{k-1}}\right]\\ \frac{q_{v,k-1}}{2}\left(r_k^2-r_{k-1}^2\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z_k\\z_k^{[1]}\end{pmatrix},\quad k=\overline{1,n-1},$$

$$\int_{r_i}^{r}\mathbf{B}_i(r,s)\mathbf{q}_i ds=-\begin{pmatrix}\frac{q_{vi}}{\lambda_i}\left[\frac{1}{4}\left(r^2-r_i^2\right)-\frac{r_i^2}{2}\ln\frac{r}{r_i}\right]\\ \frac{q_{vi}}{2}\left(r^2-r_i^2\right)\end{pmatrix},\quad i=\overline{0,n-1}.$$

Провівши відповідні математичні обчислення, встановлено, що вектор $\mathbf{P}_0$ має вигляд

$$\mathbf{P}_0 = \begin{pmatrix} p_0 \\ p_0^{[1]} \end{pmatrix},$$

$$p_0 = \alpha r_n \frac{q_{v0}}{\lambda_0}\left[\frac{1}{4}\left(r_1^2 - r_0^2\right) - \frac{r_0^2}{2}\ln\left(\frac{r_1}{r_0}\right)\right] + \alpha r_n \frac{q_{v0}}{2}\left(r_1^2 - r_0^2\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln\left(\frac{r_{k+1}}{r_k}\right)}{\lambda_k} +$$

де $$+\alpha r_n \sum_{i=2}^{n}\left[\frac{q_{vi-1}}{\lambda_{i-1}}\left[\frac{1}{4}\left(r_i^2 - r_{i-1}^2\right) - \frac{r_{i-1}^2}{2}\ln\left(\frac{r_i}{r_{i-1}}\right)\right] + \frac{q_{vi-1}}{2}\left(r_i^2 - r_{i-1}^2\right)\sum_{k=i}^{n}\frac{\ln\left(\frac{r_{k+1}}{r_k}\right)}{\lambda_k}\right] - \alpha r_n \psi(\tau) -$$

$$-\left(\frac{q_{v0}}{2}\left(r_1^2 - r_0^2\right) + \sum_{i=2}^{n}\frac{q_{vi-1}}{2}\left(r_i^2 - r_{i-1}^2\right)\right),$$

$$p_0^{[1]} = 0.$$

Далі необхідно знайти функцію $v(r,\tau)$ як розв'язок задачі (12) з нульовими крайовими умовами (13) при початковій умові (14). Метод розв'язування такої задачі з використанням методу власних функцій детально описано в роботах [0-0, 0-0]. Тут лише слід зауважити, що:

1) характеристичне рівняння відповідної задачі на власні значення матиме вигляд

$$\det\left[P + Q \cdot B\left(r_n, r_0, \omega\right)\right] = 0, \tag{15}$$

де, $$B\left(r_n, r_0, \omega\right) = \prod_{i=1}^{n} B_{i-1}\left(r_i, r_{i-1}, \omega\right),\ B_i\left(r_{i+1}, r_i, \omega\right) = \begin{pmatrix} b_{11}^i & b_{12}^i \\ b_{21}^i & b_{22}^i \end{pmatrix},$$

$$b_{11}^i = \frac{\pi\beta_i r_i\left(J_1\left(\beta_i, r_i\right)Y_0\left(\beta_i, r_{i+1}\right) - J_0\left(\beta_i, r_{i+1}\right)Y_1\left(\beta_i, r_i\right)\right)}{2},$$

$$b_{12}^i = \frac{\pi\left(J_0\left(\beta_i, r_i\right)Y_0\left(\beta_i, r_{i+1}\right) - J_0\left(\beta_i, r_{i+1}\right)Y_0\left(\beta_i, r_i\right)\right)}{2\lambda_i},$$

$$b_{21}^i = \frac{\pi\lambda_i\beta_i^2 r_{i+1} r_i\left(J_1\left(\beta_i, r_{i+1}\right)Y_1\left(\beta_i, r_i\right) - J_1\left(\beta_i, r_i\right)Y_1\left(\beta_i, r_{i+1}\right)\right)}{2},$$

$$b_{22}^i = \frac{\pi\beta_i r_{i+1}\left(J_1\left(\beta_i, r_{i+1}\right)Y_0\left(\beta_i, r_i\right) - J_0\left(\beta_i, r_i\right)Y_1\left(\beta_i, r_{i+1}\right)\right)}{2},$$

2) $\beta_i = \sqrt{\frac{\omega c_i \rho_i}{\lambda_i}}$ J_0, J_1 і N_0, N_1 – функції Бесселя та Неймана нульового та першого порядків відповідно.

3) Власні вектори, першою координатою яких є власні функції мають вигляд [0]

$$\mathbf{R}_{k0}\left(r, \omega_k\right) = \tilde{B}_0\left(r, r_0, \omega_k\right) \cdot \left(1, \quad 0\right)^T = \left(b_{11}^0, \quad b_{21}^0\right)^T,$$

$$\mathbf{R}_{ki}\left(r, \omega_k\right) = \tilde{B}_{i-1}\left(r, r_{i-1}, \omega_k\right) \cdot \tilde{B}\left(r_{i-1}, r_0, \omega_k\right) \cdot \left(1, \quad 0\right)^T = \tilde{B}_{i-1}\left(r, r_{i-1}, \omega_k\right) \cdot \tilde{B}\left(r_{i-1}, r_1, \omega_k\right) \cdot \left(b_{11}^0, \quad b_{21}^0\right)^T. \tag{16}$$

Розв'язок задачі (12)-(14) методом власних функцій зображується у вигляді [11-13, 16-18]

$$v(r,\tau)\sum_{i=0}^{n-1} v_i(r,\tau)\cdot\theta_i,$$

$$v_i(r,\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[f_k\cdot e^{-\omega_k\tau}-\int_0^{\tau} e^{-\omega_k(\tau-s)}\gamma_k(s)ds\right]\cdot R_{ki}(r,\omega_k),$$

де f_k та γ_k коефіцієнти розвинення початкової умови T_0 та функції $\frac{\partial u}{\partial\tau}$ відповідно в ряди Фур'є за системою власних функцій $R_k(r,\omega_k)$.

Граничний перехід при $r_0\to 0$ *та зображення розв'язку вихідної задачі (1)-(4).* На основі методу редукції розв'язок вихідної задачі зображується у вигляді

$$T(r,\tau)=\lim_{r_0\to 0}\left(u(r,\tau)+v(r,\tau)\right).$$

Значення початкового вектору $\mathbf{P}_0$ після граничного переходу матиме вигляд:

$$\lim_{r_0\to 0}\mathbf{P}_0=\begin{pmatrix} \alpha r_n\frac{q_{v0}}{\lambda_0}\left[\frac{1}{4}r_1^2\right]+\alpha r_n\frac{q_{v0}}{2}r_1^2\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln\left(\frac{r_{k+1}}{r_k}\right)}{\lambda_k}+ \\ +\alpha r_n\sum_{i=2}^{n}\left[\frac{q_{vi-1}}{\lambda_{i-1}}\left[\frac{1}{4}\left(r_i^2-r_{i-1}^2\right)-\frac{r_{i-1}^2}{2}\ln\left(\frac{r_i}{r_{i-1}}\right)\right]+\frac{q_{vi-1}}{2}\left(r_i^2-r_{i-1}^2\right)\sum_{k=i}^{n}\frac{\ln\left(\frac{r_{k+1}}{r_k}\right)}{\lambda_k}\right]-\alpha r_n\psi(\tau)- \\ -\left(\frac{q_{v0}}{2}r_1^2+\sum_{i=2}^{n}\frac{q_{vi-1}}{2}\left(r_i^2-r_{i-1}^2\right)\right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Зауваження! Оскільки (див напр. [0]) $J_1(\beta_0 r_0)=\frac{\beta_0 r_0}{2}+...,$

$$Y_1(\beta_0 r_0)=\frac{2}{\pi}J_1(\beta_0 r_0)\left(\ln\frac{\beta_0 r_0}{2}+const\right)-\frac{2}{\pi\beta_0 r_0}-\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^m\frac{\beta_0 r_0}{2}}{m!(m+1)!}\left(\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\right)\right],$$

то

$$\begin{aligned}&\lim_{r_0\to 0} r_0\left(J_1(\beta_0,r_0)Y_0(\beta_0,r_1)-J_0(\beta_0,r_1)Y_1(\beta_0,r_0)\right)=\frac{2J_0(\beta_0,r_1)}{\pi\beta_0},\\ &\lim_{r_0\to 0} r_0\left(J_1(\beta_0,r_1)Y_1(\beta_0,r_0)-J_1(\beta_0,r_0)Y_1(\beta_0,r_1)\right)=-\frac{2J_1(\beta_0,r_1)}{\pi\beta_0}.\end{aligned}\qquad(17)$$

Позначивши $B(r_n,r_1,\omega)=B_{n-1}(r_n,r_{n-1},\omega)\cdot B_{n-2}(r_{n-1},r_{n-2},\omega)\cdot....\cdot B_1(r_2,r_1,\omega)=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix},$

характеристичне рівняння (15) у розгорнутому вигляді можна записати наступним чином:

$$\left(\alpha r_n c_{11}+c_{21}\right)\frac{\pi\beta_0 r_0\left(J_1\left(\beta_0,r_0\right)Y_0\left(\beta_0,r_1\right)-J_0\left(\beta_0,r_1\right)Y_1\left(\beta_0,r_0\right)\right)}{2}+$$
$$+\left(\alpha r_n c_{12}+c_{22}\right)\frac{\pi\lambda_0\beta_0^2 r_1 r_0\left(J_1\left(\beta_0,r_1\right)Y_1\left(\beta_0,r_0\right)-J_1\left(\beta_0,r_0\right)Y_1\left(\beta_0,r_1\right)\right)}{2}=0,$$

а на основі (17) отримуємо характеристичне рівняння (15) після граничного переходу:

$$\lim_{r_0\to 0}\Delta\left(r_0\right)=\left(\alpha r_n c_{11}+c_{21}\right)J_0\left(\beta_0,r_1\right)-\left(\alpha r_n c_{12}+c_{22}\right)\lambda_0\beta_0 r_1 J_1\left(\beta_0,r_1\right)=0.$$

Відповідні власні вектори (16) після граничного переходу зобразяться так:

$$\mathbf{R}_{k0}\left(r,\omega_k\right)=\tilde{B}_0\left(r,0,\omega\right)\cdot\left(1,\quad 0\right)^T=\left(J_0\left(\beta_0\cdot r\right),\quad -\lambda_0\beta_0 r J_0\left(\beta_0\cdot r\right)\right)^T,$$
$$\mathbf{R}_{k0}\left(0,\omega_k\right)=\left(1,\quad 0\right)^T.$$
$$\mathbf{R}_{ki}\left(r,\omega_k\right)=\tilde{B}_{i-1}\left(r,r_{i-1},\omega\right)\cdot\tilde{B}\left(r_{i-1},r_1,\omega\right)\cdot\left(J_0\left(\beta_0\cdot r_1\right),\quad -\lambda_0\beta_0 r_1 J_0\left(\beta_0\cdot r_1\right)\right)^T.$$

На основі вище наведених формул можна зробити висновок, що функція $T\left(r,\tau\right)$ є обмеженою у всій конструкції та немає особливостей в точці $r=0$.

Модельний приклад. Задля ілюстрації запропонованого методу розглянемо модельний приклад, про нагрівання циліндричної конструкції, яка складається з ядра та тришарової оболонки. Теплофізичні характеристики та геометричні розміри конструкції наведено у табл. 1.

Таблиця 1 – Теплотехнічні характеристики конструкції

Параметр	Ядро	Шар 1	Шар 2	Шар 3
Радіус r, м	$r_0=0,05$	$r_1=0,08$	$r_2=0,1$	$r_3=0,12$
Коефіцієнт теплопровідності λ, $\frac{\text{Вт}}{\text{м}\cdot{}^0\text{C}}$	2,9	0,146	209	0,9
Питома масова теплоємність c, $\frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot{}^0\text{C}}$	921	1580	894	1340
Густина ρ, $\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	2800	1600	2680	240
Внутрішнє джерело тепла q_v, $\frac{\text{кВт}}{\text{м}^3}$	10	відсутнє	25	відсутнє

Температура навколо зовнішньої поверхні конструкції змінюється за стандартним температурним режимом пожежі $\psi\left(\tau\right)=345\lg\left(\frac{8\tau}{60}+1\right)+20$. Коефіцієнт теплообміну між поверхнею конструкції та середовищем пожежі становить $\alpha=25\frac{\text{Вт}}{\text{м}^2\cdot{}^0\text{C}}$. Початкова температура конструкції $20\,^0\text{C}$. Необхідно знайти розподіл нестаціонарного температурного поля вздовж радіуса циліндричної конструкції. Використавши вищеописаний метод, який реалізовано у системі комп'ютерної алгебри Maple 13 [0], отримуємо розв'язок поставленої задачі у вигляді графіка (рис. 1) .

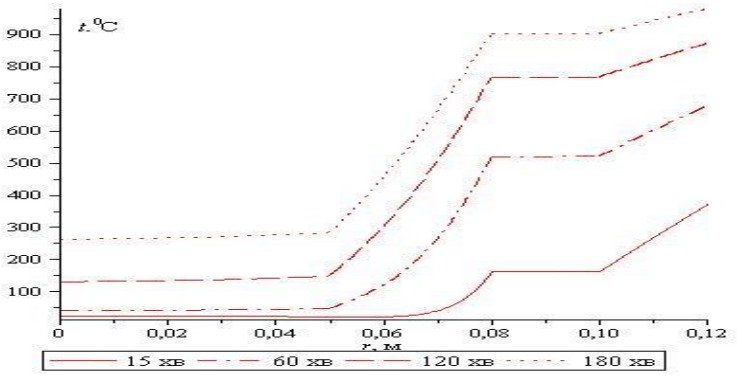

Рисунок 1 – Розподіл нестаціонарного температурного поля циліндричної конструкції

Висновки. До розв'язування поставленої задачі застосовано прямий аналітичний метод, щодо визначення нестаціонарного температурного поля у суцільній багатошаровій циліндричній конструкції з урахуванням внутрішніх джерел тепла. Використано ідею граничного переходу шляхом прямування радіуса «вилученого» циліндра до нуля. Встановлено, що при такому підході всі відповідні функції не мають особливостей в нулі, а це означає, що й розв'язок вихідної задачі є обмеженим. Розв'язаний приклад є модельним, що ілюструє лише можливості запропонованого методу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М. : Высшая школа, 1967. 600 с.
2. F. de Monte. Unsteady heat conduction in two-dimensional two slab-shaped regions. Exact closed-form solution and results. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2003. Vol. 46, Issue 8. pp. 1455-1469. https://doi.org/10.1016/S0017-9310(02)00417-9.
3. Singh S. Analytical solution for three-dimensional, unsteady heat conduction in a multilayer sphere. *Journal of Heat Transfer*. 2016. Vol. 138, Issue 10. P.101301. https://doi.org/10.1115/1.4033536.
4. X. Lu. A new analytical method to solve the heat equation for a multi-dimensional composite slab. *J. Phys. A: Math.* Gen. 2005. No. 38. Pp. 2873–2890.
5. X. Lu. Transient analytical solution to heat conduction in composite circular cylinder. *Int. J. Heat Mass Transf.* 2006. No. 49. Pp. 341–348. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2005.06.019.
6. Özişik M. N. Finite Difference Methods in Heat Transfer. *Second Edition.* New York : CRC Press, 2017. 580 p. https://doi.org/10.1201/9781315121475
7. Gosz M. R. Finite Element Method: Applications in Solids, Structures, and Heat Transfer. New York : CRC Press, 2017. 400 p. https://doi.org/10.1201/9781315275857
8. Daneshjou, K. Transient thermal analysis in 2D orthotropic FG hollow cylinder with heat source. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2015. No 89. Pp. 977–984. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.05.104
9. Pazen O. Yu. Direct (classical) method of calculation of the temperature field in a hollow multilayer cylinder. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics.* 2018. Vol. 91, Issue 6. Pp. 1373-1384. https://doi.org/10.1007/s10891-018-1871-3
10. Таций Р. М., Стасюк М. Ф., Пазен О., Ю. Прямой метод расчета температурного поля в многослойной полой сферической конструкции. *Вестник Кокшетауского технического института.* 2018. №29, 1. С. 9-20.
11. Yang, B. Closed-form analytical solutions of transient heat conduction in hollow composite cylinders with any number of layers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2017. Vol. 108. Pp. 907–917. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.12.020
12. Pazen O. Yu. General boundary-value problems for the heat conduction equation with piecewise-continuous coefficients. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics.* 2016. Vol. 89, no. 2. Pp. 357-368. https://doi.org/10.1007/s10891-016-1386-8

13. Тацій Р. М. Прямий метод розрахунку нестаціонарного температурного поля за умов пожежі. *Збірник наукових праць Пожежна безпека*. 2015. № 26. С. 135-141.
14. Арсенин В.Я. Методы математической физики. М. : Наука, 1974. 432 с.
15. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики. М. : Наука, 1977. 735 с.
16. Тацій Р. М. Загальна третя крайова задача для рівняння теплопровідності з кусково-сталими коефіцієнтами та внутрішніми джерелами тепла. *Збірник наукових праць Пожежна безпека*. 2015. № 27. С. 120-126.
17. Tatsiy R., Stasiuk M., Pazen O., & Vovk S. Modeling of Boundary-Value Problems of Heat Conduction for Multilayered Hollow Cylinder. *Problems of Infocommunications. Science and Technology*. Pp. 21-25. DOI: 10.1109/INFOCOMMST.2018.8632131.
18. Толстов Г. П. Ряды Фурье.М.: Физмалит, 1960. 392 с.

REFERENCES

1. Lyikov A. V. Teoriya teploprovodnosti. M. : Vyisshaya shkola, 1967. 600 s.
2. F. de Monte. Unsteady heat conduction in two-dimensional two slab-shaped regions. Exact closed-form solution and results. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2003. Vol. 46, Issue 8. pp. 1455-1469. https://doi.org/10.1016/S0017-9310(02)00417-9.
3. Singh S. Analytical solution for three-dimensional, unsteady heat conduction in a multilayer sphere. *Journal of Heat Transfer*. 2016. Vol. 138, Issue 10. P.101301. https://doi.org/10.1115/1.4033536.
4. X. Lu. A new analytical method to solve the heat equation for a multi-dimensional composite slab. *J. Phys. A: Math.* Gen. 2005. No. 38. Pp. 2873–2890.
5. X. Lu. Transient analytical solution to heat conduction in composite circular cylinder. *Int. J. Heat Mass Transf.* 2006. No. 49. Pp. 341–348. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2005.06.019.
6. Özişik M. N. Finite Difference Methods in Heat Transfer. *Second Edition.* New York : CRC Press, 2017. 580 p. https://doi.org/10.1201/9781315121475
7. Gosz M. R. Finite Element Method: Applications in Solids, Structures, and Heat Transfer. New York : CRC Press, 2017. 400 p. https://doi.org/10.1201/9781315275857
8. Daneshjou, K. Transient thermal analysis in 2D orthotropic FG hollow cylinder with heat source. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2015. No 89. Pp. 977–984. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2015.05.104
9. Pazen O. Yu. Direct (classical) method of calculation of the temperature field in a hollow multilayer cylinder. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics.* 2018. Vol. 91, Issue 6. Pp. 1373-1384. https://doi.org/10.1007/s10891-018-1871-3
10. Tatsiy R. M., Stasyuk M. F., Pazen O., Yu. Pryamoy metod rascheta temperaturnogo polya v mnogosloynoy poloy sfericheskoy konstruktsii. Vestnik Kokshetauskogo tehnicheskogo instituta. 2018. #29, 1. S. 9-20.
11. Yang, B. Closed-form analytical solutions of transient heat conduction in hollow composite cylinders with any number of layers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2017. Vol. 108. Pp. 907–917. https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.12.020
12. Pazen O. Yu. General boundary-value problems for the heat conduction equation with piecewise-continuous coefficients. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics.* 2016. Vol. 89, no. 2. Pp. 357-368. https://doi.org/10.1007/s10891-016-1386-8
13. Tatsiy R. M., Stasyuk M. F., Pazen O., Yu. Pryamoy metod rascheta temperaturnogo polya v mnogosloynoy poloy sfericheskoy konstruktsii. Vestnik Kokshetauskogo tehnicheskogo instituta. 2018. #29, 1. S. 9-20.
14. Arsenin V.Ya. Metodyi matematicheskoy fiziki. M. : Nauka, 1974. 432 s.
15. Tihonov A.N. Uravneniya matematicheskoy fiziki. M. : Nauka, 1977. 735 s.
16. Tatsii R. M. Zahalna tretia kraiova zadacha dlia rivniannia teploprovidnosti z kuskovo-stalymy koefitsiientamy ta vnutrishnimy dzherelamy tepla. Zbirnyk naukovykh prats Pozhezhna bezpeka. 2015. № 27. S. 120-126 [In Ukrainian].
17. Tatsiy R., Stasiuk M., Pazen O., & Vovk S. Modeling of Boundary-Value Problems of Heat Conduction for Multilayered Hollow Cylinder. *Problems of Infocommunications. Science and Technology*. Pp. 21-25. DOI: 10.1109/INFOCOMMST.2018.8632131 [In Ukrainian].
18. Tolstov G. P. Ryadyi Fure. M.: Fizmalit, 1960. 392 s.

MATHEMATICAL MODELING OF THE HEAT EXCHANGE PROCESS IN A MULTILAYER SOLID CYLINDER TAKING INTO ACCOUNT INTERNAL HEAT SOURCES

O. Pazen, Dr. Sc. (Phys. & Math.), Prof.; *R. Tatsiy, Cand. Sc. (Eng.)*
Lviv State Univercity of life safety, Ukraine

KEY WORDS: solid cylindrical, quasi-derivative, direct method, boundary transition

ANNOTATION

The study of heat transfer in multilayer solid cylindrical structures is an integral part in determining the limit of fire resistance of structures: columns of round cross section, tubular concrete columns and structures that have a round solid cross section.

Analytical methods should be applied to multilayer structures. However, in practice, the number of layers is usually limited to two or three. This is due to the fact that with increasing number of layers, the requirements for calculations increase significantly. In addition, in the problems "cylinder inside the multilayer shell", there is a problem of limiting the solution at the point. The aim of this work was to apply a direct method to find an effective analytical solution of the problem of thermal conductivity in solid multilayer cylindrical structures, taking into account internal heat sources.

A direct analytical method was used to determine the nonstationary temperature field in a solid multilayer cylindrical structure taking into account internal heat sources. The idea of boundary transition by directing the radius of the "removed" cylinder to zero is used. It is established that in this approach all the corresponding functions do not have singularities in zero, which means that the solution of the original problem is limited. The solved example is a model, which illustrates only the possibilities of the proposed method.